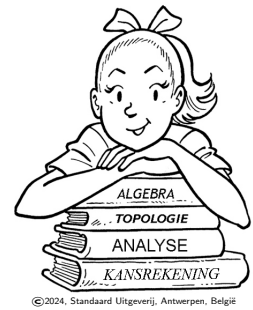


WISKUNNEND WISKE

DE KOMIEKE KOORDEN



OPDRACHT 1

Suske en Wiske hebben een vakantiejob in een geofysisch instituut. Hun baas, professor Aart Beving, werkt op een model van de aarde en is op zoek naar zogenaamde *orthopunten*.

Het model van professor Beving gaat ervan uit dat de aarde een perfecte bol is in \mathbb{R}^3 , met straal R en middelpunt O . Een *koorde* van de aarde is een lijnstuk dat twee punten op het aardoppervlak (dat is de sfeer met straal R en middelpunt O) verbindt. Gegeven een inwendig punt P van de aarde, kunnen we door dat punt een koorde kiezen. We kunnen dan een tweede koorde door datzelfde punt kiezen, loodrecht op de eerste koorde. Dit bepaalt dan meteen een derde koorde door P , loodrecht op de andere twee.

Een inwendig punt P van de aarde heet een *orthopunt* indien het volgende eigenschap bezit: voor elke keuze van drie twee aan twee loodrechte koorden door P is de som van de kwadraten van de lengtes van die drie koorden dezelfde.

Kan jij Suske en Wiske helpen door alle orthopunten van de aarde te bepalen? Wij vragen jou om de verzameling van alle orthopunten van de aarde wiskundig te beschrijven, te bewijzen dat dit inderdaad allemaal orthopunten zijn en te bewijzen dat er geen andere orthopunten zijn.

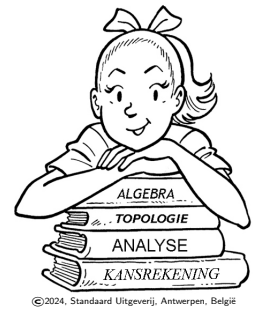
WISKUNDIG WEETJE

Seismische tomografie is de wetenschap die tracht te achterhalen hoe onze aarde er vanbinnen uitziet, vertrekkend van seismische gegevens. Natuurfenomenen zoals aardbevingen worden voortdurend gemeten op verschillende plaatsen op aarde door seismische waarnemingsstations. Deze metingen afkomstig van het aardoppervlak worden aan de hand van allerlei wiskundige technieken gecombineerd om een beeld te krijgen van wat er zich binnenin onze aardbol afspeelt.

De basisgedachte is dat de schokgolf voortgebracht door een aardbeving zich met verschillende snelheden zal voortplanten naargelang de fysische eigenschappen (zoals bijvoorbeeld de dichtheid) van de materie die de golf onderweg tegenkomt. Ook zullen sommige materialen de golf meer dempen dan andere. Zulke tijds- en intensiteitsverschillen naargelang de plaats van de meting zijn het *gevolg* van de interne geologische structuren die de golf onderweg is tegengekomen. Terwijl we in andere takken van de wetenschap meestal proberen te voorspellen wat de gevolgen zullen zijn van een bepaald fenomeen, gaan we hier omgekeerd te werk: we meten de gevolgen en proberen zo nauwkeurig mogelijk de *oorzaak* te reconstrueren. Dit noemen we in de wiskunde *inverse problemen*. Het is een belangrijke tak van de wiskunde met ontelbare praktische toepassingen. De seismische tomografie laat niet alleen toe om lagen in de aarde te identificeren maar ook hun dikte te berekenen, te achterhalen of er water of aardolie in de ondergrond te vinden is, ...

Ook medische beeldvorming (zoals positronemissietomografie, echografie, MRI-scan, ...) zit vol met inverse problemen die vragen om wiskundige oplossingstechnieken die gebruik maken van bijvoorbeeld differentiaalvergelijkingen, Fourieranalyse, waveletanalyse zowel als numerieke benaderingsmethoden. Het vroegtijdig opsporen van tumoren, het opvolgen van de ontwikkeling van een foetus, of het bestuderen van hersenactiviteit zijn maar enkele voorbeelden van dingen die zonder wiskunde gewoonweg onmogelijk zouden zijn.

WISKUNNEND WISKE



MIJNEN MIJDEN



OPDRACHT 2

Wiske en Lambik kijken vol spanning naar TV. De laatste opdracht in het populaire programma “Krimson Island” gaat beginnen. Er zijn nog 12 kandidaten in de running. Om naar de volgende aflevering te gaan moeten de deelnemers een voor een, in een volgorde bepaald door hun scores op de voorgaande opdrachten, via een pad van 14 keer 2 vierkante stenen tegels (zoals in de foto hierboven) de overkant van het terrein trachten te bereiken. De spelers mogen enkel op de stenen lopen en Krimson heeft op elk van de 14 rijen van 2 stenen een landmijn verborgen onder een van de stenen. Wie naast het pad loopt of op een landmijn trapt wordt onmiddellijk geëlimineerd uit de competitie. Over een van de 14 rijen springen mag ook niet. De spelers moeten dus van elke rij een steen gebruiken.

De stenen zien er allemaal identiek uit en geen van de spelers weet waar de landmijnen liggen. Wel mogen de spelers kijken hoe hun voorgangers het doen. Na een tijd weten de spelers die nog niet aan de beurt kwamen dus waar er goede tegels liggen en gaan ze die dan ook gebruiken in hun oversteek.

Net voor het startschot gegeven wordt, komt tante Sidonia uit de keuken en schakelt prompt de TV uit. Dat soort spelletjes is immers veel te gewelddadig volgens haar!

Wiske en Lambik zijn nu zeer verveeld en willen graag weten hoeveel kandidaten er nog zullen overblijven in de volgende aflevering. Voorbij de rij waar hun voorganger is gestrand, weten de deelnemers niet waar de landmijnen liggen. Na die rij is er dus geen andere manier dan om bij elke stap vooruit, op hoop van zegen, een van de twee tegels te kiezen. Het enige wat Wiske en Lambik nu kunnen doen om een idee te krijgen van hoeveel deelnemers te verwachten zijn in de volgende aflevering, is berekenen hoeveel deelnemers *gemiddeld* aan het einde van het pad zullen geraken.

Bepaal het *verwachte*¹ aantal deelnemers dat bij deze “Krimson Island” opdracht de overkant bereikt en dus naar de volgende aflevering gaat. Wij verwachten hier een uitdrukking die het exacte gemiddelde weergeeft en uiteraard een wiskundige uitleg en toelichting van de werkmethode.

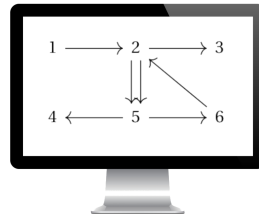
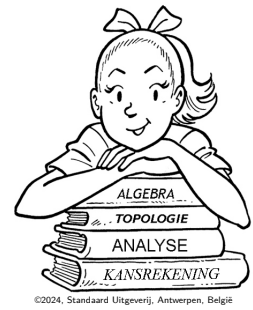
WISKUNDIG WEETJE

Een van de belangrijkste toepassingen van de wiskunde is niet alleen het maken van voorspellingen maar ook het inschatten van de betrouwbaarheid van die voorspellingen. Kansrekening is een belangrijke tak van de wiskunde die voor gegeven fenomenen of experimenten die kunnen leiden tot verschillende uitkomsten gaat aanduiden welke uitkomst (of welke uitkomsten) het meest waarschijnlijk is (of zijn). Het voorspellen van het gemiddelde van de uitkomsten die je zal verkrijgen als je een bepaald experiment een (groot) aantal keer herhaalt, behoort ook tot de mogelijkheden, maar meer verfijnde modellen laten toe om betere voorspellingen te doen. Zo wordt gevorderde kanstheorie bijvoorbeeld gebruikt om het weer te voorspellen of om voor verzekeringsmaatschappijen te berekenen welke premies aantrekkelijk zijn voor de klant en toch (met grote waarschijnlijkheid) de maatschappij niet bankroet zullen laten gaan.

¹de verwachting (of verwachtingswaarde) van een stochastische variabele is de waarde die deze stochastische variabele ‘gemiddeld genomen’ zal aannemen. Dit gemiddelde is het gewogen gemiddelde van alle mogelijke uitkomsten met als gewichtsfactor de kans dat een bepaalde waarde zich voordoet.

WISKUNNEND WISKE

NETELIGE NETWERKEN



OPDRACHT 3

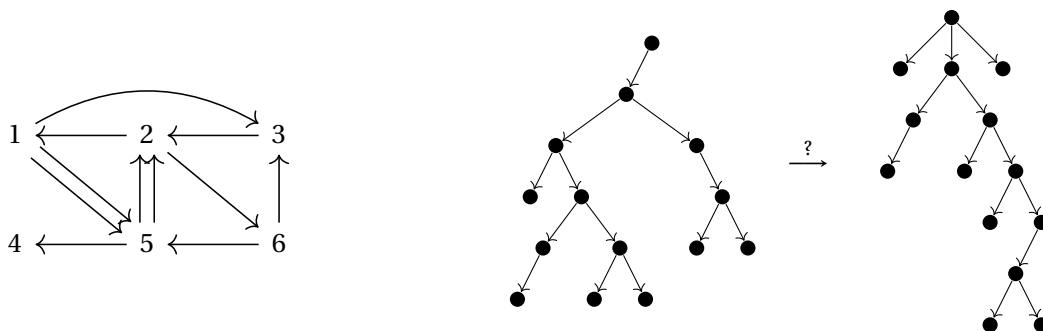
Suske en Wiske zien een netwerk van punten en pijlen op het computerscherm van professor Barabas staan, zoals in de foto hierboven. Barabas legt uit dat het een simulatie is van een fysisch proces dat hij beter probeert te begrijpen. Door invloed van buitenaf kan het netwerk *transformeren*. Als een punt, p , in het netwerk wordt beïnvloed, dan verandert het netwerk volgens de volgende transformatieregels:

1. De punten blijven onveranderd.
2. Voor elk pad van de vorm $a \rightarrow p \rightarrow b$ wordt er een nieuwe pijl $a \rightarrow b$ gemaakt. Als hierdoor tussen twee punten twee pijlen in de tegenovergestelde richting van elkaar komen te staan, dan worden die twee pijlen geschrapt.
3. Alle pijlen die aankomen of vertrekken in p veranderen van richting.

Om dit te illustreren klikt Barabas op het punt genummerd "2".

- Het pad $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ levert een pijl op van 1 naar 3.
- De twee paden $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5$ leveren twee pijlen op van 1 naar 5.
- Het pad $6 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ levert een pijl op van 6 naar 3.
- De twee paden $6 \rightarrow 2 \rightarrow 5$ leveren twee pijlen op van 6 naar 5. Een daarvan wordt geschrapt met de al bestaande pijl van 5 naar 6 omdat die in de andere richting wijst.
- Alle pijlen die aankomen of vertrekken in 2 veranderen van richting.

Na de transformatie ziet het netwerk er dus uit zoals links in onderstaande figuur.



De opdracht

Barabas typt een paar dingen op het toetsenbord en twee nieuwe netwerken verschijnen, zoals rechts in bovenstaande figuur. Merk op dat de zes punten van de netwerken hierboven werden genummerd om de transformatieregels helder uit te leggen maar geen deel uitmaken van het model: een netwerk bestaat uit enkel punten en pijlen. Pijlen hebben een richting of *oriëntatie*. Als we geen rekening houden met de oriëntatie van de pijlen, spreken we van een *ongeöriënteerde* graaf. Een *oriëntatie* van een graaf is het geheel van de richtingen van de pijlen van die graaf. Door de richting van een of meerdere pijlen te veranderen, veranderen we de oriëntatie van de graaf.

De professor heeft al veel kunnen experimenteren met deze *boomnetwerken*. Een boomnetwerk is een netwerk waarin geen ongeoriënteerde cyclussen voorkomen. In het netwerk op het computerscherm vormen bijvoorbeeld $2 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 2$ een cyclus. In het netwerk na transformatie is $2 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \leftarrow 1 \leftarrow 2$ een ongeoriënteerde cyclus.

1. Barabas vermoedt dat het mogelijk is om, door enkel netwerktransformaties toe te passen, van het ene boomnetwerk op de figuur naar het andere te gaan (eventueel na verschuiving van enkele toppen). Kan jij een opeenvolging van punten in het linkse boomnetwerk geven die, als Barabas er achtereenvolgens op klikt om ze te beïnvloeden, zullen leiden tot het rechtse boomnetwerk? Het is allicht een goed idee om de punten te nummeren.
2. Ten tweede stelt Barabas zich de volgende vraag: als ik de pijlen in een willekeurig gegeven boomnetwerk (zonder vooraf gegeven oriëntatie) op twee manieren oriënteer, kan ik dan altijd van de ene oriëntatie naar de andere gaan door een opeenvolging van netwerktransformaties? Hier vragen we een bewijs of een tegenvoorbeeld.

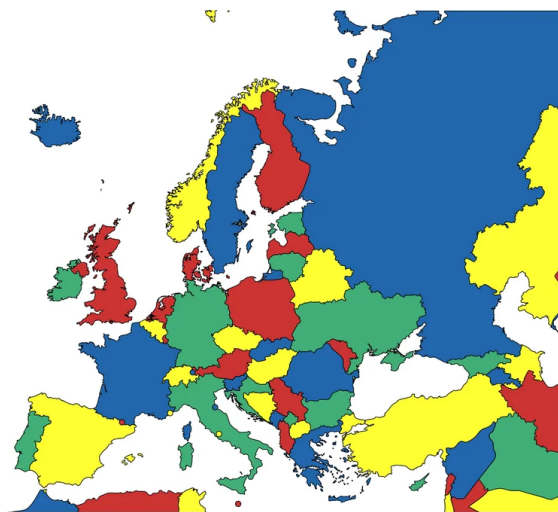
WISKUNDIG WEETJE

Het schematisch weergeven van verbanden tussen objecten via punten en pijlen is een van de meest gebruikte modelleringstechnieken. Wiskundigen bestuderen dit soort netwerken in de *grafentheorie*. De kracht van deze theorie ligt in de eenvoud van de objecten die erin worden bestudeerd: het gaat om punten en verbindingen (al dan niet georiënteerd). Deze eenvoud maakt het concept zeer flexibel en algemeen toepasbaar. Niet alleen computernetwerken kunnen ermee bestudeerd worden maar ook sociale netwerken (denk aan de “Facebook graaf”), ingewikkelde biologische processen, transport en logistiek, ...

Het algoritme dat door Google wordt gebruikt om voor een zoekopdracht de lijst van de meest relevante webpagina's op te stellen is gebaseerd op een graaf. De punten van de Google graaf zijn webpagina's en de pijlen zijn verwijzingen (onder de vorm van “hyperlinks”) tussen pagina's. Elk punt van de graaf draagt ook extra informatie zoals betrouwbaarheid en belang. Bijvoorbeeld: hoe meer webpagina's verwijzen naar een zekere website, des te belangrijker is hij. De uiteindelijke berekening van de lijst maakt gebruik van een algebraïsche voorstelling van de Google graaf met matrices en komt neer op het zoeken van zogenaamde *eigenvectoren* ervan. Er is dus een grote interactie tussen grafentheorie, algebra en data science.

Er zijn ook voorbeelden waar computerberekeningen helpen bij de ontwikkeling van een wiskundige theorie. De oorsprong van het *vierkleurenprobleem* ligt in het vinden van het minimum aantal kleuren dat nodig is om een landkaart in te kleuren zodanig dat aangrenzende landen steeds een verschillende kleur krijgen. Er is lang een vermoeden geweest dat 4 kleuren moeten volstaan, voor elke landkaart. Het is pas in de 70'er jaren, met de opkomst van computers, dat correcte bewijzen voor het vermoeden het daglicht zagen. Tot nu toe maken alle gekende bewijzen van dit vermoeden gebruik van computerberekeningen.

4 color theorem applied to Europe
 Color 1
 Color 2
 Color 3
 Color 4



Om het probleem op te lossen stap je over op een wiskundig model dat een landkaart omzet in een *planaire graaf*. Dat is een graaf die je kan tekenen in het vlak zonder dat pijlen mekaar snijden. Daarna reduceer je het probleem tot het nagaan van een bepaalde eigenschap voor een groot (maar eindig) aantal grafen. Dat is de plaats waar computerprogramma's worden gebruikt.